**\documentclass[**12pt**]{**book**}**

**\usepackage[**T1**]{**fontenc**}**

**\usepackage[**T2A**]{**fontenc**}**

**\usepackage[**utf8**]{**inputenc**}**

**\usepackage[**english, russian**]{**babel**}**

**\usepackage{**amsmath**}**

**\textwidth=**371pt

**\textheight=**608pt

**\pagestyle{**empty**}**

**\begin{**document**}**

**\small{** **\slshape{** **\noindent** 278 **\hfill** Лекция 19. Формула и ряд Тейлора**}** **\upshape}** **\normalsize**

**\hrule\bigskip**

**$$** b**)\quad** **\lim**\_**{**x**\to** +0**}** **\Big(\ctg**2x **\Big)**^**\frac{**1**}{\ln** x**}$$** **\\**

**\bfseries** **{**Лекция 19. Формула и ряд Тейлор**}** **\mdseries** **\\**

**\fbox{**%

**\parbox{**318pt**}{**%

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Ряд тейлора. Формулы и ряды Тейлора для некоторых элементарных функций и использование их для вычисления пределов и в приближённых вычислениях.

**}**%

**}** **\\**

Формула и ряд Тейлора**\footnote[**9**]{**Б.Тейлор**(**1685-1731**)** - английский математик.**}** относятся к числу важнейших понятий математического анализа. Они широко используются в математике. В частности, в этом семестре мы будем использовать их при исследовании функций, приближённом вычислении значений функций, численном решении уравнений и оценке возникающих при этом ошибок.**\\**

**\bfseries** 19.1. Многочлен Тейлора **\mdseries** **\\**

Пусть функция **$**y **=** f**(**x**)$** **$**n**$** раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку **$**x\_**{**0**}$**. Построим многочлен степени **$**m**<**n**$** **\\**

**$$**P\_**{**m**}(**x**)=**C\_**{**0**}**+C\_**{**1**}(**x-x\_**{**0**})**-C\_**{**2**}(**x-x\_**{**0**})**^2+ **\cdots** +C\_**{**m**}(**x-x\_**{**0**})**^m**=\quad** **(**19.1**)** **$$**

**$$=\sum\limits**\_**{**k**=**0**}**^**{**m**}** C\_**{**k**}(**x-x\_**{**0**})**^k,**$$**

**\noindent** коэфиценты которого определим из условия совпадения значений этого многочлена

и его m производных с соответствующими значениями функций **$**y **=** f**(**x**)$** и её

производных в точке **$**x\_**{**0**}$**.

**\begin{**equation**}** **\tag{**19.2**}**

**\begin{**cases**}**

**$$**P\_**{**m**}(**x\_**{**0**})=**C\_**{**0**}=**f**(**x\_**{**0**})**,**$$\\**

**$$**P\_**{**m**}**^**{**'**}(**x\_**{**0**})=**C\_**{**1**}=**f^**{**'**}(**x\_**{**0**})**,**$$\\**

**$$**P\_**{**m**}**^**{**''**}(**x\_**{**0**})=**2 **\cdot** 1 **\cdot** C\_**{**2**}=**f^**{**''**}(**x\_**{**0**})**,**$$\\**

$$P\_{m}^{'''}(x\_{0})=3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C\_{3}=f^{'''}(x\_{0}),$$\\

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\cdot $$\\

$$P\_{m}^{(k)}(x\_{0})= k \cdot (k-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot C\_{k}=f^{(k)}(x\_{0}),$$\\

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\cdot$$\\

$$P\_{m}^{(m)}(x\_{0})= m \cdot (m-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot C\_{m}=f^{(m)}(x\_{0}).$$\\

\end{cases}

\end{equation}

\small{\slshape{ \noindent Лекция 19. Формула и ряд Тейлора \hfill 279} \upshape} \normalsize

\hrule\bigskip

Члены в производных от многочлена (19.1), содержащие множитель $(x-x\_{0})$ в точке $x\_{0}$, равны нулю. Производные порядка выше $m$ от многочлена $m$-й степени также равны нулю. Из (19.2) имеем

\begin{equation} \tag{19.3}

C\_{k}=\frac{f^{(k)}(x\_{0})}{k!},k=0,1,\dots,m.

\end{equation}

В (19.3) положено $0!=1, f^{(0)}(x\_{0})=f(x\_{0}).$

Следовательно, искомый многочлен (19.1) с коэффициентами $C\_{k}$, определяемыми по формуле (19.3), будет

$$P\_{m}(x)=f(x\_{0})+f^{'}(x\_{0})(x-x\_{0})+ \cdots + \frac{f^{(m)}(x\_{0})}{m!}(x-x\_{0})^{m}= \quad (19.4)$$

$$=\sum\limits\_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x\_{0})}{k!}(x-x\_{0})^{m}.$$

\textsc{Определение} 19.1.\textit{ Многочлен (19.4) называется $m$-м многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням} $(x-x\_{0}).$

Если функция $f(x)$ сама по себе является многочленом степени $m$, то запись ее в виде (19.4) всегда возможна и озночает лишь представлени данного многочлена по степеням разности $(x-x\_{0})$.\\

\textsc{Пример} 19.1.\textit{ Представить функцию $f(x)=x^{2}$ в виде многочлена Тейлора по степеням $(x-3)$.} \\

Р\,е\,ш\,е\,н\,и\,е: Имеем $f(3)=9, f^{'}(3)=6, f^{''}(3)=2.$ Все производные выше второго порядка от $f(x)=x^{2}$ равны нулю. Следовательно, многочлен Тейлора при $x\_{0}=3$ для $f(x)=x^2$ имеет вид

$$P\_{2}(x)=9+6(x-3)+(x-3)^{2}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, очевидно, получим данную функцию $f(x)=x^{2}.$ \\

П\,р\,и\,м\,е\,р 19.2.\textit{ Пусть $f(x)=(a+x)^{m}$ и $x\_{0}=0$.} \\

Тогда по (19.4)

$$P\_{m}(x)=\sum\limits\_{k=0}^{m} \frac{((a+x)^{m})\_{x=0}^{(k)}}{k!}x^{k}=(a+x)^{m},$$

где

\begin{equation\*} \begin{split}

&((a+x)^{m})^{(k)}=m(m-1)...(m-k+1)(a+x)\_{x=0}^{m-k}= \\

&=m(m-1)...(m-k+1)a^{m-k}

\end{split}

\end{equation\*}

\end{document}